Lista 8 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald para os símbolos de Christoffel e curvatura, isto é, $\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}\, g^{ck}\,(\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab})$ e $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d$. Ainda, $R_{ac} = R_{abc}{}^b$ e $R = R_a{}^a$. Consideraremos unidades em que $c = 1$ e $G = 1$.

1. Uma partícula no espaço-tempo de Schwarzschild parte do infinito com parâmetro de impacto aparente b e velocidade coordenada v_∞ (ambos medidos por um observador estático no infinito). Mostre que a trajetória é necessariamente capturada pelo buraco negro se $b < 3\sqrt{3}M$.

2. Uma nave encontra-se em órbita circular de circunferência $2\pi r$ em torno de uma estrela de massa M. Tal nave dispara um canhão laser com frequência de repouso ν_0. O canhão está apontado no plano orbital e faz um ângulo α (no referencial da nave) com a direção tangencial do movimento. Qual é a frequência do laser vista por um observador estacionário no infinito?

3. Considere uma partícula numa órbita circular estável no espaço-tempo de Schwarzschild. Mostre que sua velocidade angular coordenada Ω coincide com aquela do problema de Kepler, isto é, $\Omega^2 = M/r^3$.

4. (Wald) Uma partícula (não necessariamente em movimento geodésico) encontra-se na região II do espaço-tempo de Schwarzschild estendido, onde $r < 2M$. Mostre que ela deve diminuir sua coordenada radial a uma taxa dada por $|dr/d\tau| \geq \sqrt{2M/r - 1}$. Mostre, portanto, que o tempo de vida máximo de qualquer observador na região II é de $\tau = \pi M$, ou seja, qualquer observador na região II será puxado para a singularidade em $r = 0$ dentro deste tempo próprio. Mostre que este tempo é máximo para um movimento em queda livre (isto é, geodésico) de $r = 2M$ com $e \to 0$.

5. (Carroll) Considere um observador com coordenadas espaciais constantes (r_*, θ_*, ϕ_*) em torno de um buraco negro de Schwarzschild de massa M. O observador lança um farol no buraco negro (diretamente para baixo, ao longo de uma trajetória radial). O farol emite radiação em um comprimento de onda constante λ_{em} (no referencial de repouso do farol).

   (a) Calcule a velocidade coordenada dr/dt do farol em função de r.

   (b) Imagine que o farol passa por outro observador em um raio fixado r, mas que esse segundo observador está usando momentaneamente coordenadas localmente inerciais definidas em torno deste evento. Calcule a velocidade própria do farol, ou seja, a velocidade coordenada medida por este segundo observador, em função de r. Qual é seu valor no horizonte de eventos"?

(c) Calcule o comprimento de onda $\lambda_{\rm obs}$, medido pelo observador em r_*, em função do raio $r_{\rm em}$ no qual a radiação foi emitida.

(d) Calcule o instante $t_{\rm obs}$ em que o feixe de luz emitido pelo farol no raio $r_{\rm em}$ será observado em r_*.

(e) Mostre que eventualmente o desvio para o vermelho cresce exponencialmente: $\lambda_{\rm obs}/\lambda_{\rm em} \propto e^{t_{\rm obs}/T}$. Obtenha uma expressão para a constante T em termos da massa do buraco negro..

6. **Avanço do periélio** Obtivemos em aula a equação para órbitas de partículas massivas no espaço-tempo de Schwarzschild,

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \mathcal{E} + \frac{2m}{L^2}u + 2mu^3, \tag{1}$$

onde $u = 1/r$, e $\mathcal{E}$ e L são as constantes do movimento que vêm da invariância da métrica de Schwarzschild em relação a t e ϕ. Mais precisamente, $\mathcal{E} = \frac{E^2-1}{L^2}$ com $E = (1-\frac{2m}{r})\dot{t}$ e $L = r^2\dot{\phi}$, onde a derivada é com relação ao parâmetro afim que pode ser tomado como o tempo próprio.

(a) Revise o problema de Kepler Newtoniano e mostre que ele dá origem exatamente à equação acima sem o último termo, isto é, a

$$\left(\frac{du_0}{d\phi}\right)^2 + u_0^2 = \mathcal{E} + \frac{2m}{L^2}u_0.$$

(b) Complete o quadrado em u_0 para mostrar que tal equação é equivalente a

$$\left(\frac{d}{d\phi}(u_0 - u_c)\right)^2 + (u_0 - u_c)^2 = A^2,$$

com $u_c = m/L^2$ e $A^2 = \mathcal{E} + m^2/L^4$. Esta é a equação do oscilador harmônico simples que tem como solução $u_0 - u_c = A\cos(\phi - \phi_0)$, onde ϕ_0 é uma constante de integração que tomaremos como zero. Desta forma, temos que

$$u_0 = \frac{m}{L^2}\left(1 + e\cos\phi\right), \tag{2}$$

com e constante. Note que isso representa uma cônica, como já esperávamos da solução para o problema de Kepler:

$$r_0(\phi) = \frac{L^2/m}{1 + e\cos\phi}.$$

(c) Vamos agora incluir a correção relativística para a equação de u, Eq. (1), perturbativamente. Para isso precisamos de um parâmetro de perturbação adimensional ϵ que seja pequeno e que identificaremos mais à frente. Uma escala de comprimento para o problema em questão é dada pela distância corresponte ao afélio ($r_1 = 1/u_1$) ou periélio ($r_2 = 1/u_2$). Vamos tomar $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$, de maneira que se a órbita não for muito alongada teremos $y := u/\bar{u}$ de ordem 1. (Note que no caso não relativístico $\bar{u}$ é constante e igual a m/L^2). Mostre que, com isso,

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + y^2 = \frac{\mathcal{E}}{\bar{u}^2} + \frac{2m}{L^2\bar{u}}y + 2m\bar{u}y^3,$$

(d) Mostre que $y_1 = u_1/\bar{u}$ e $y_2 = u_2/\bar{u}$ são a menor e maior raiz de

$$2m\bar{u}\,y^3 - y^2 + \frac{2m}{L^2\bar{u}}y + \frac{\mathcal{E}}{\bar{u}^2} = 0. \tag{3}$$

Denotemos a terceira raiz da equação acima por y_3, de maneira que $y_1 \leq y_3 \leq y_2$. Escreva a equação acima como $\epsilon(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, onde $\epsilon := 2m\bar{u}$, e mostre que $y_1 + y_2 + y_3 = 1/\epsilon$ e $y_1 + y_2 = 2$, de maneira que $\epsilon y_3 = 1 - 2\epsilon$.

(e) Como vimos acima, y é uma quantidade de ordem 1, de maneira que podemos considerar o termo cúbico em (3) perturbativamente se $\epsilon = 2m\bar{u}$ for pequeno. Para Mercúrio e Terra temos $\epsilon \simeq 5,1 \times 10^{-8}$ e $\epsilon \simeq 2 \times 10^{-8}$ respectivamente, de maneira que essa condição é amplamente satisfeita. Utilizando os resultados acima mostre que, em primeira ordem em ϵ,

$$\frac{d\phi}{dy} = \pm\frac{1 + \epsilon(1 + \bar{u}/2)}{\sqrt{(y - y_1)(y_2 - y)}}$$

(f) Podemos agora achar o ângulo entre afélio e periélio consecutivos integrando a equação acima. Mostre que, em primeira ordem em ϵ, tal ângulo é dado por $\int_{y_1}^{y_2} \frac{d\phi}{dy}dy = \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right)\pi$. O ângulo entre dois periélios consecutivos é, assim, dado por duas vezes esse valor.

(g) Mostre que a cada revolução o periélio avança, em primeira ordem emde ϵ, de um ângulo $\Delta\phi = 3\epsilon\pi$, isto é,

$$\Delta\phi = \frac{3GM\pi}{c^2}\left(\frac{1}{r_{\text{periélio}}} + \frac{1}{r_{\text{afélio}}}\right).$$

(h) Calcule o avanço do periélio de Mercúrio, nessa aproximação, no período de um século.